

NOUVEAU - DÈS SEMAINE 4 - SEANCES DE SOUTIEN LE SOIR

- **Lundi 17h30 - 19h00 en CM 0 13**
- **Juedi 18h15 - 19h45 en MA A1 12**

Deuxième partie:

Cinématique du point matériel

Cinématique: description du mouvement indépendamment de ses causes

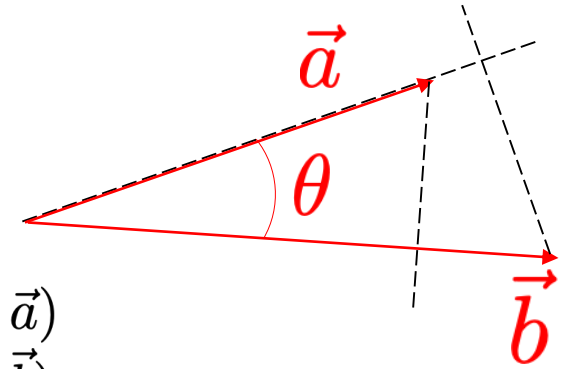
Notions abordées :

- 2.1 rappels d'analyse vectorielle
- 2.2 cinématique: trajectoire, vitesse, accélération normale et tangentielle, mouvement circulaire uniforme
- 2.3 Base en rotation
- 2.4 vitesse et accélération en coordonnées cylindriques
- 2.5 vitesse et accélération en coordonnées sphériques
- 2.6 contraintes et forces de liaison (dynamique)

Buts:

- décrire un mouvement
- apprendre à travailler avec différents systèmes de coordonnées
- savoir écrire les équations du mouvement d'un point matériel

2.1 Produit scalaire



- Définition d'un produit « scalaire » (i.e. un nombre):

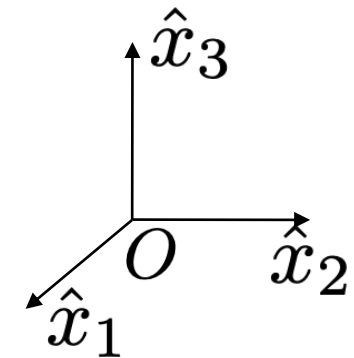
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ &= (\text{norme de } \vec{a}) * (\text{norme de la projection de } \vec{b} \text{ sur } \vec{a}) \\ &= (\text{norme de } \vec{b}) * (\text{norme de la projection de } \vec{a} \text{ sur } \vec{b}) \end{aligned}$$

- En composantes (dans un repère orthonormé):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_2 + a_3 \hat{x}_3) \cdot (b_1 \hat{x}_1 + b_2 \hat{x}_2 + b_3 \hat{x}_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

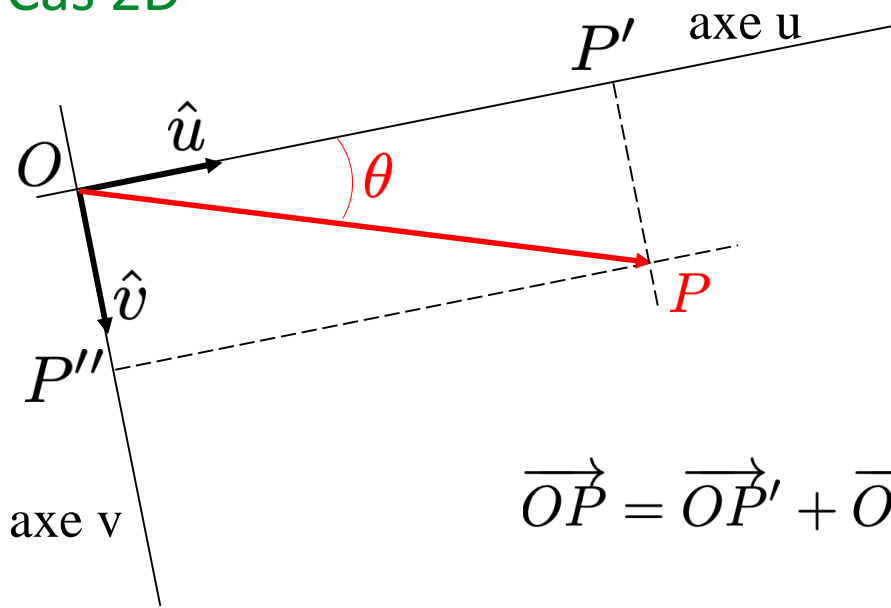
- Propriétés:

- Commutativité: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributivité: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- Linéarité: $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- ➡ - Vecteurs orthogonaux: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- (Norme)² d'un vecteur: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$
- ➡ - Norme d'un vecteur $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$



2.1 Projections et composantes d'un vecteur

Cas 2D

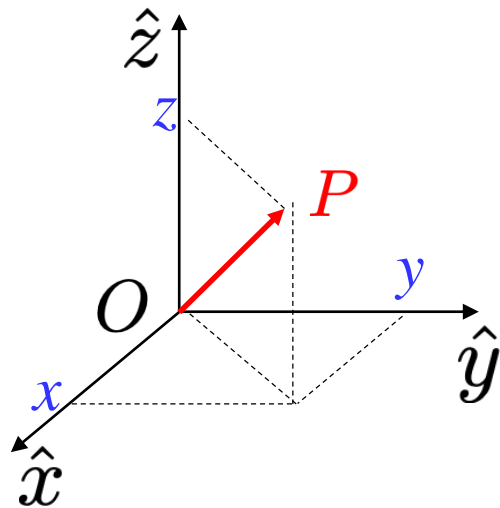


Projection du vecteur \overrightarrow{OP} sur l'axe \hat{u} :

$$\underbrace{\overrightarrow{OP} \cdot \hat{u} = |\overrightarrow{OP}| |\hat{u}| \cos \theta = OP \cos \theta = OP'}_{\text{produit scalaire}}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''} = OP' \hat{u} + OP'' \hat{v} = (\overrightarrow{OP} \cdot \hat{u}) \hat{u} + (\overrightarrow{OP} \cdot \hat{v}) \hat{v}$$

Cas 3D



Coordonnées cartésiennes du point P
ou composantes du vecteur : \overrightarrow{OP}

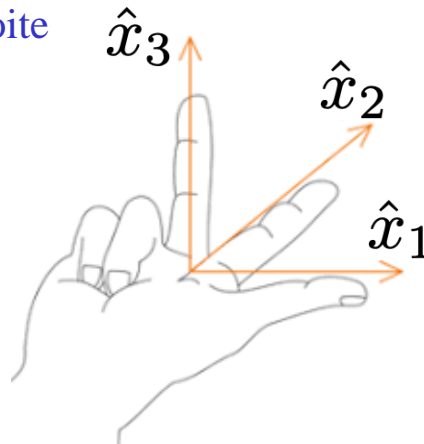
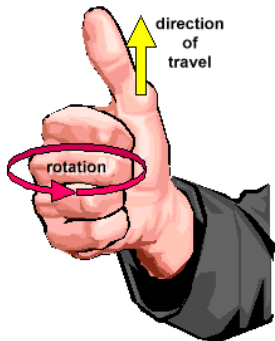
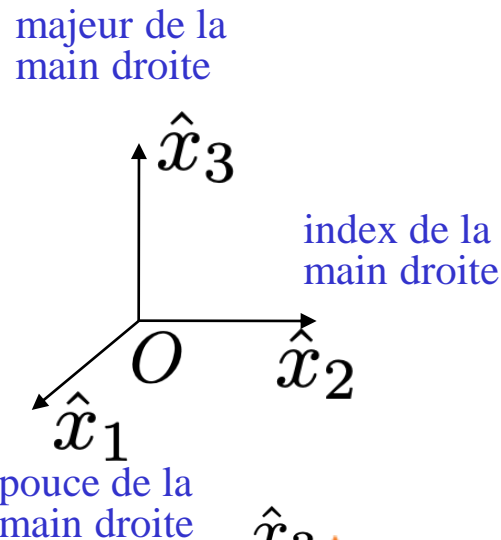
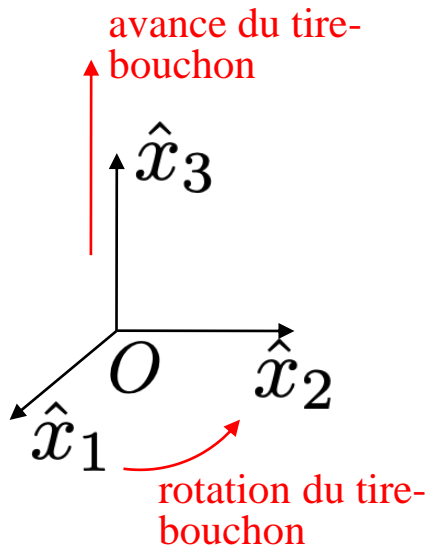
$$\begin{cases} x = \overrightarrow{OP} \cdot \hat{x} \\ y = \overrightarrow{OP} \cdot \hat{y} \\ z = \overrightarrow{OP} \cdot \hat{z} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OP} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.1 Repère direct (ou repère droit)

- Par convention, on n'utilise que des repères dont la chiralité est définie (arbitrairement) par la « **règle du tire-bouchon** » ou la « **règle de la main droite** »

Repère direct ou droit:
deux définitions équivalentes



Un mouvement de rotation qui amène l'axe 1 sur l'axe 2 ferait avancer un tire-bouchon dans la direction de l'axe 3:

L'avance d'un tire-bouchon droit est donnée par la direction du pouce de la main droite quand la rotation est donnée par les doigts qui se referment.

Main droite:

Le pouce orienté selon l'axe 1

L'index orienté selon l'axe 2

Le majeur orienté selon l'axe 3

2.1 Produit vectoriel

- Définition d'un produit « vectoriel » (i.e. un vecteur):

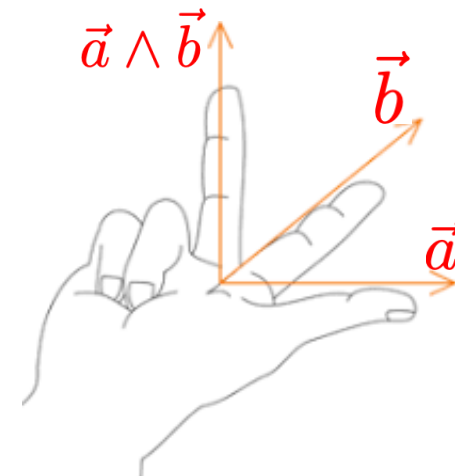
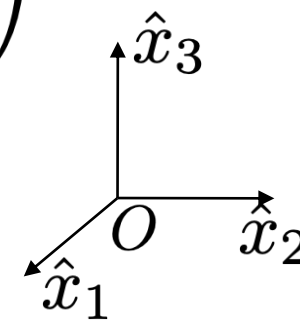
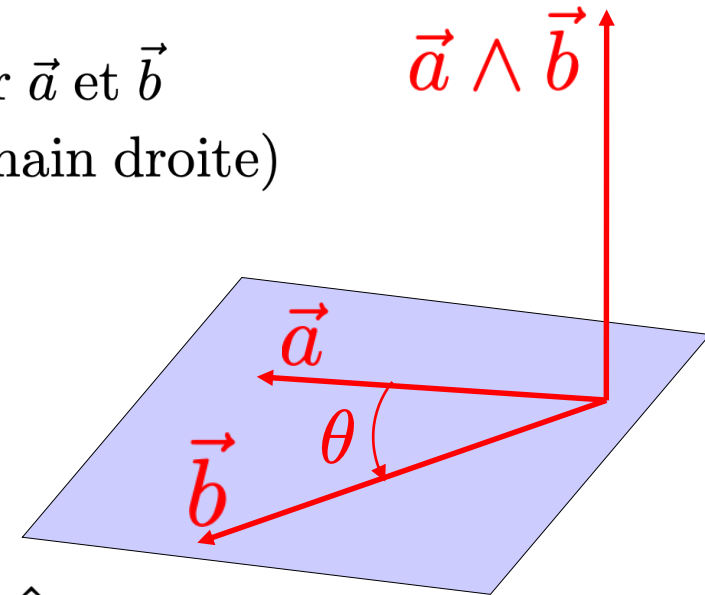
direction de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ = normale au plan défini par \vec{a} et \vec{b}

sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ = conventionel (règle de la main droite)

norme de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ = $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$

- En composantes:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{x}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{x}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{x}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{déterminant}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}_{\text{composantes}}$$

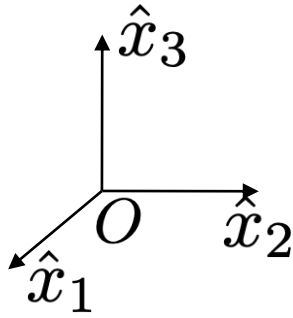


- Propriétés:

- **Anti-commutativité:** $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
- **Distributivité:** $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
- **Linéarité:** $\vec{a} \wedge (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$
- **Vecteurs parallèles:** $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$



Quiz



$$\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_3 =$$

?

\hat{x}_2 $-\hat{x}_2$

$$\hat{x}_3 \wedge \hat{x}_2 = ?$$

?

\hat{x}_1 $-\hat{x}_1$

2.1 Autres propriétés utiles

- **Produit mixte (= un scalaire):**

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ et } \vec{c} \text{ coplanaires (dans le même plan)}$$

- **Double produit vectoriel (= un vecteur):**

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

perpendiculaire à \vec{a} et
dans le plan de \vec{b} et \vec{c}

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$$

- **Distributivité de la dérivation:**

$$\frac{d}{dx}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dx} \cdot \vec{b} \right) + \left(\vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dx} \right)$$

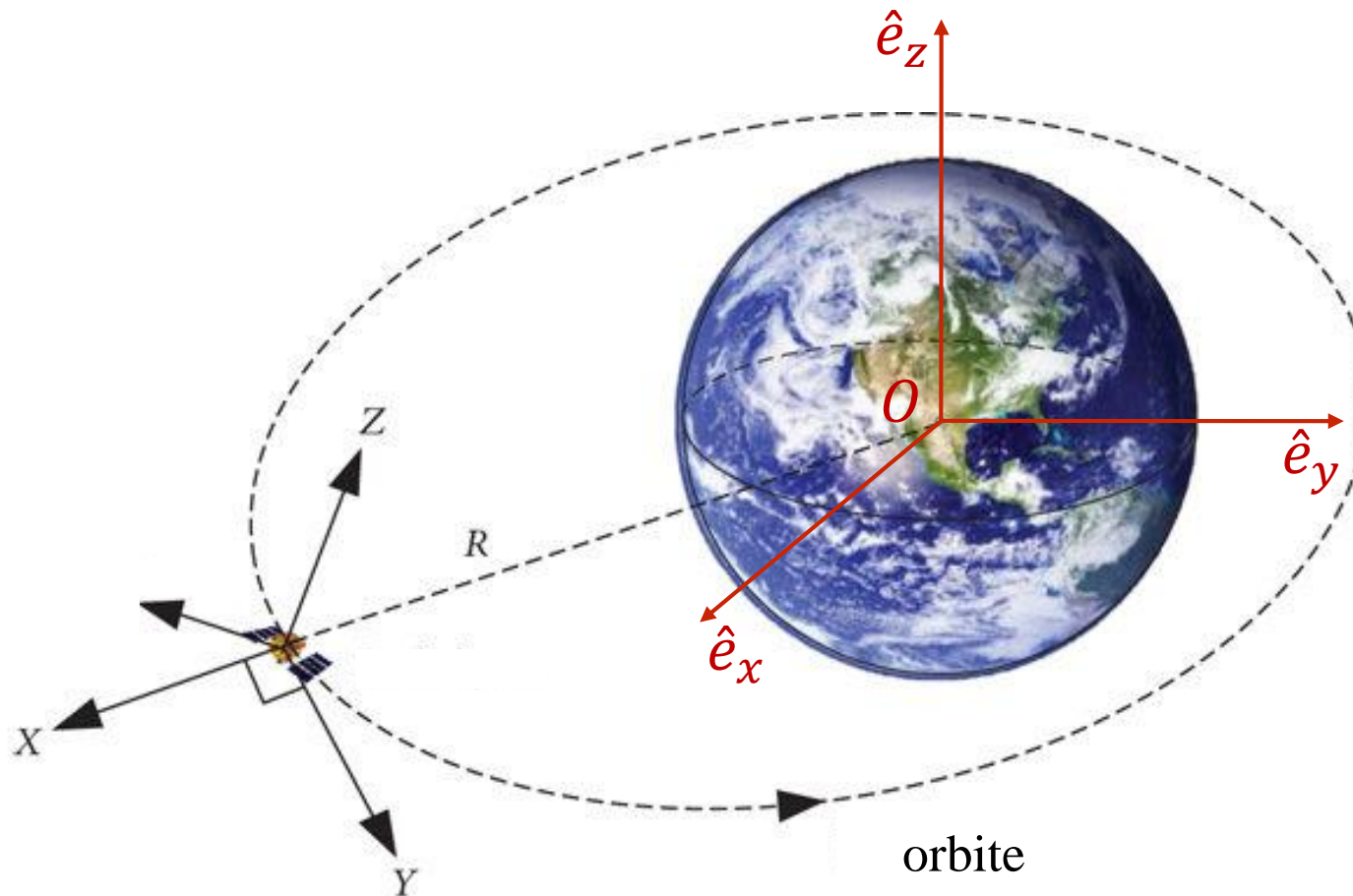
$$\frac{d}{dx}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dx} \wedge \vec{b} \right) + \left(\vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dx} \right)$$

2.2 Cinématique du point matériel

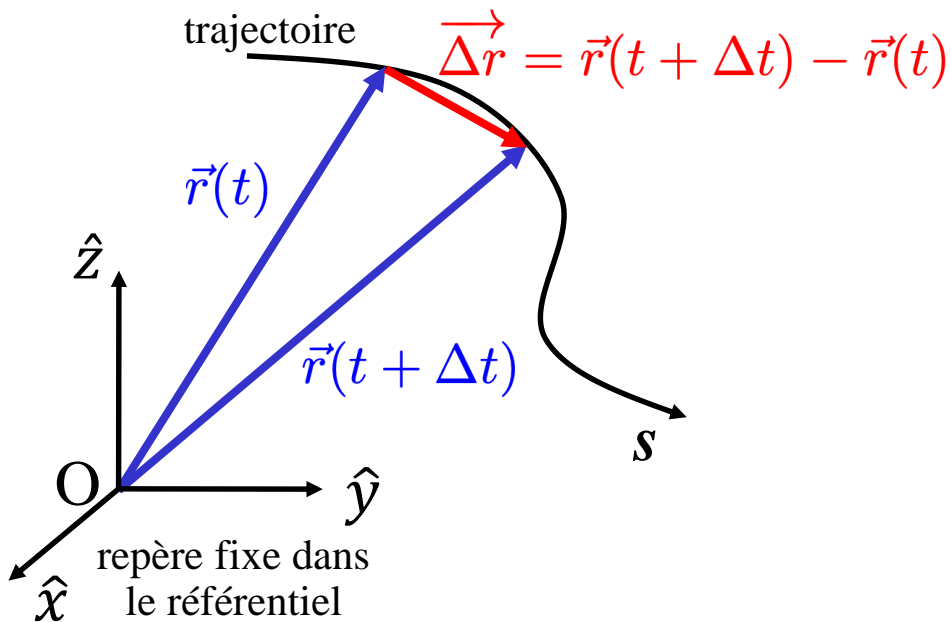
La cinématique a pour objet la description du mouvement (**trajectoire**) d'un point matériel M

Trajectoire: courbe décrite par la position $M(t)$ au cours du temps t

Ex. de trajectoire: mouvement d'un satellite autour de la Terre



2.2 Cinématique du point matériel: vitesse



$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$ Position par rapport à O

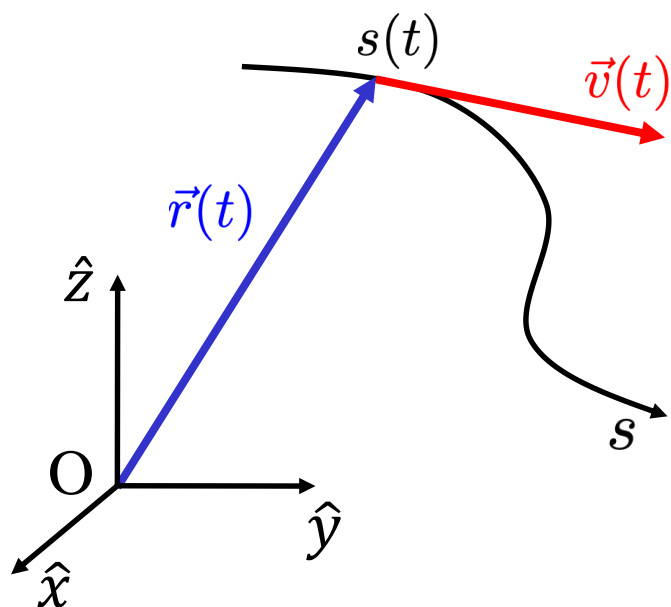
$s(t)$ Abscisse curviligne = distance parcourue le long de la trajectoire

$v(t) = \frac{ds}{dt} = |\vec{v}(t)|$ Vitesse scalaire

Ex.: la valeur indiquée par le compteur de vitesse de notre voiture

La vitesse est un vecteur: norme + direction

La vitesse $\vec{v}(t)$ est toujours tangent à la trajectoire

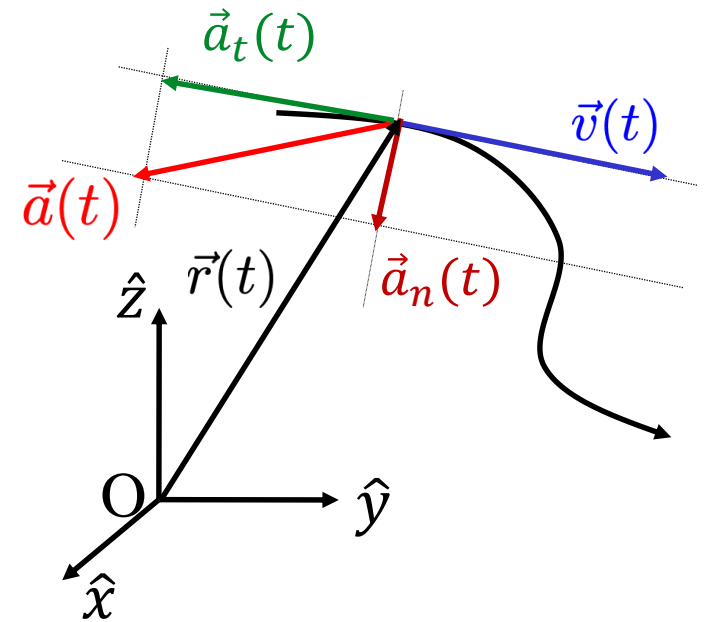
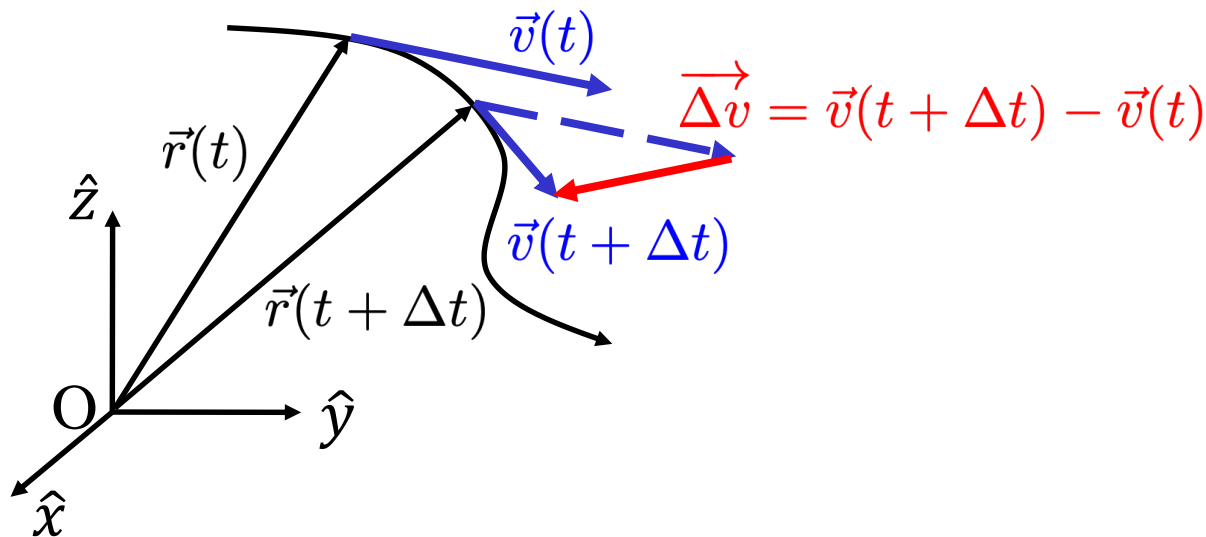


$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v(t) \frac{d\vec{r}}{ds} = v(t) \hat{t}$$

$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ Vecteur unitaire tangent à la trajectoire

Quand Δt devient petit, $\Delta \vec{r}$ se confond avec la trajectoire

2.2 Cinématique du point matériel: accélération



$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t)$$

$$\vec{a}_t(t) = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} \quad \text{Accélération tangentielle (parallèle à } \vec{v}(t)\text{)}$$

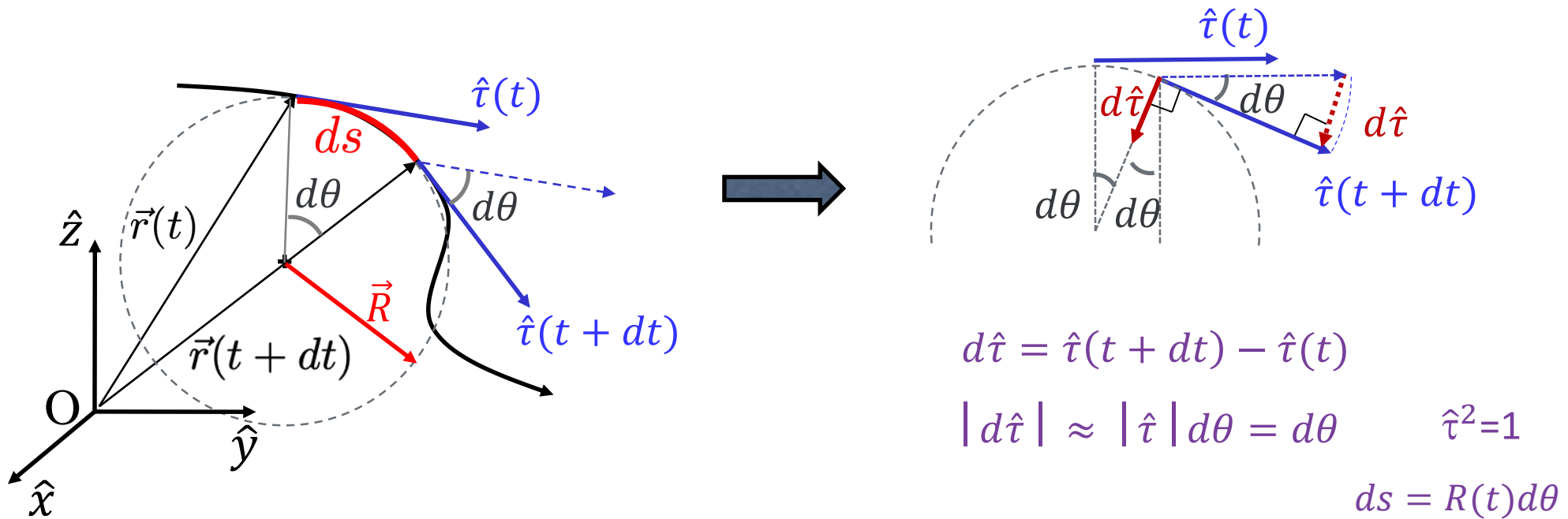
$$\vec{a}_n(t) = v\frac{d\hat{\tau}}{dt} \quad \text{Accélération normale (perpendiculaire à } \vec{v}(t)\text{)}$$

Vecteur accélération:
2 composantes

$$\hat{\tau} \cdot \hat{\tau} = 1 \rightarrow \frac{d(\hat{\tau} \cdot \hat{\tau})}{dt} = \frac{d1}{dt} = 0 \quad \text{mais} \quad \frac{d(\hat{\tau} \cdot \hat{\tau})}{dt} = 2\hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} \rightarrow \hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\hat{\tau}}{dt} \perp \hat{\tau}$$

2.2 Accélération normale

Approximation de la trajectoire entre les instants t et $t + dt$ par un **arc de cercle** de **rayon $R(t)$** et de longueur **$ds = R(t)d\theta$**



$$\vec{a}_n(t) = v(t) \frac{d\hat{t}}{dt} = v(t) \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = v^2 \frac{d\hat{t}}{ds}$$

$$a_n(t) = |\vec{a}_n(t)| = v^2 \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = v^2 \frac{d\theta}{R(t)d\theta} = \frac{v^2(t)}{R(t)}$$

$\vec{a}_n(t) \parallel d\hat{t} \perp \vec{v}(t) \Rightarrow$ orienté vers le centre de rotation instantané

Norme de l'accélération normale

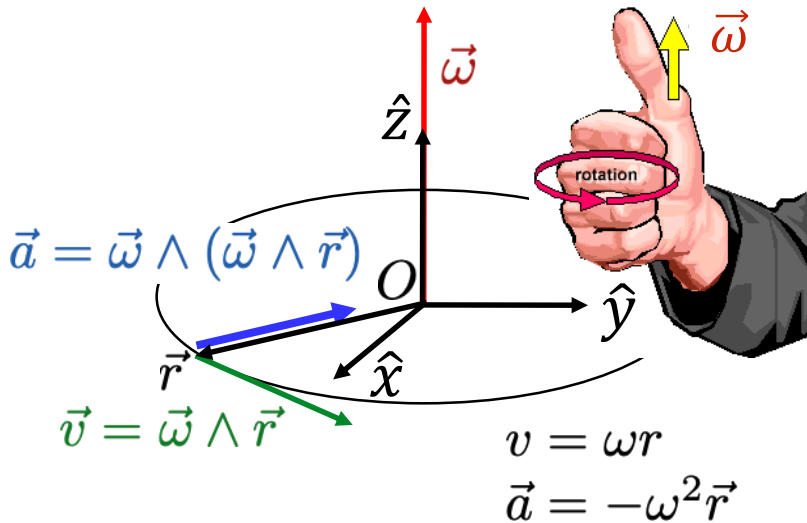
Alternativement, si on choisit un repère avec O au centre de rotation instantané ($\vec{r} = \vec{R}$), on trouve que

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \dot{\vec{v}} = v(t) + \vec{r} \cdot \dot{\vec{v}} = 0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \dot{\vec{v}} = -v(t) < 0 \Rightarrow \dot{\vec{v}} = \frac{d\hat{t}}{dt} \text{ et } \vec{r} \text{ sont opposés}$$

2.2 Mouvement circulaire uniforme

Point matériel en mouvement le long d'une circonférence avec vitesse angulaire constante

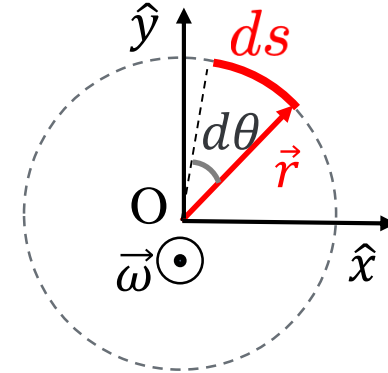
$$\vec{\omega} = \text{constante}$$



$$\text{Vitesse: } \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\text{Norme: } v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt} = r\omega$$

Direction: - tangent à la trajectoire ($\perp \vec{r}$)
- dans le plan du mouvement ($\perp \vec{\omega}$)



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_t = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r} = -\omega^2 r \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}$$

Accélération centripète (dirigée vers le centre)

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -m \omega^2 \vec{r}$$

Force centripète

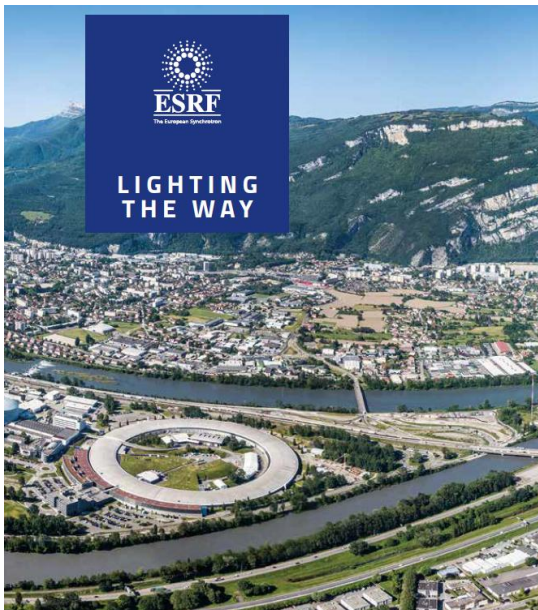
N.B.: il n'y a pas d'accélération tangentielle

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \hat{t} = r \frac{d\omega}{dt} \hat{t} = 0$$

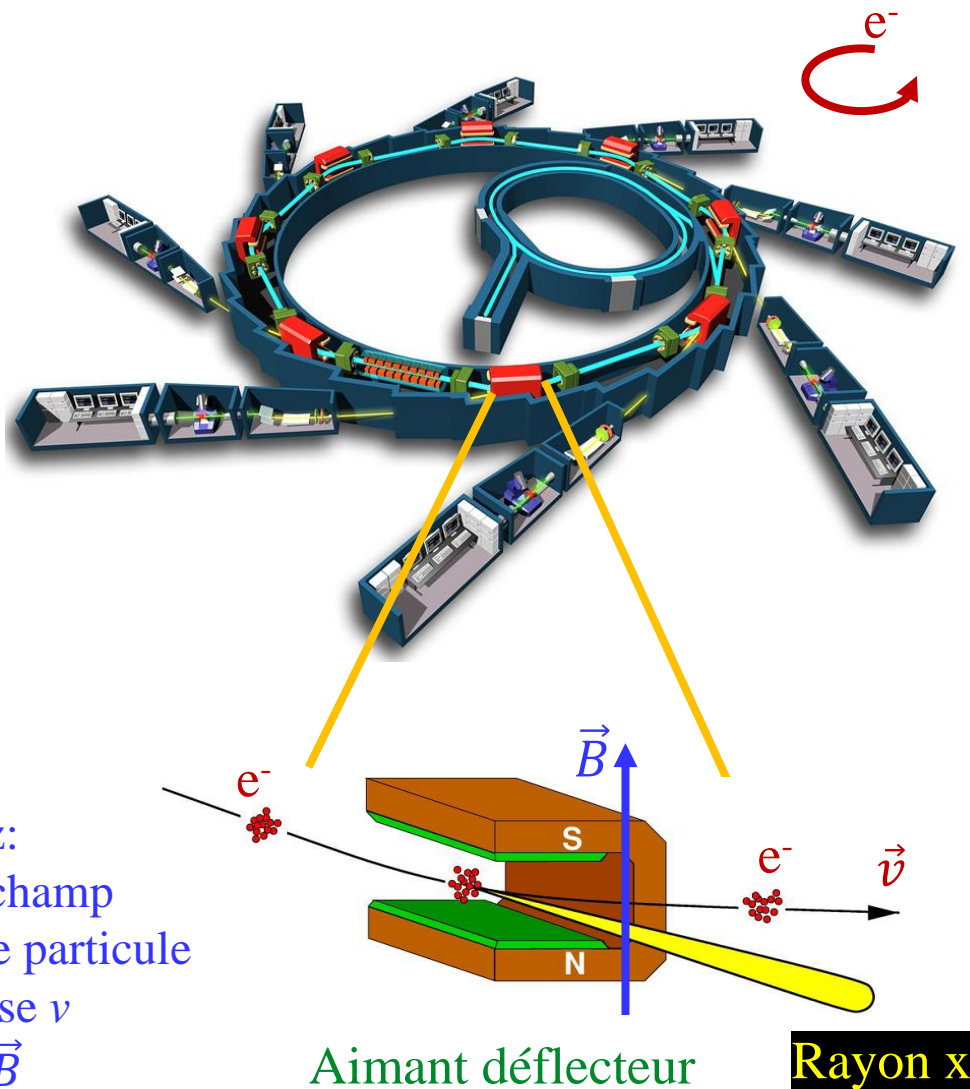
2.2 Ex.: Mouvement circulaire

Synchrotron: accélérateur à haute énergie d'un faisceau d'électron

ESRF: European Synchrotron Radiation Facility



SLS: Swiss Light Source



Force de Lorentz:
force exercée par un champ
électromagnétique sur une particule
de charge q et vitesse v
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Aimant déflecteur

Rayon x

Pour un electron $q = -e$

2.6 Contraintes et forces de liaison

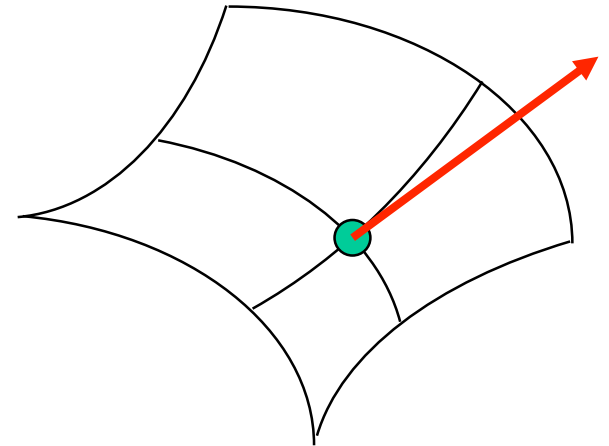
La **dynamique** est une discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en **mouvement sous l'influence des actions mécaniques (ou forces)** qui leur sont appliquées

Déjà rencontrée: force de pesanteur et frottement avec l'air

- Point matériel restreint à se déplacer sur un support, par exemple une courbe ou une surface lisse (fixe ou en mouvement)

- Exemples:

- Pendule mathématique, contraint à rester à une distance constante d'un point fixe (i.e. sur une surface sphérique centrée sur ce point)
- Wagonnet d'un « grand huit », qui ne doit pas dérailler
- Goutte d'eau coulant sur le pare-brise d'une voiture
- Bille dans un anneau en rotation



- **Force de liaison = force exercée sur le point matériel pour qu'il obéisse à une contrainte géométrique**

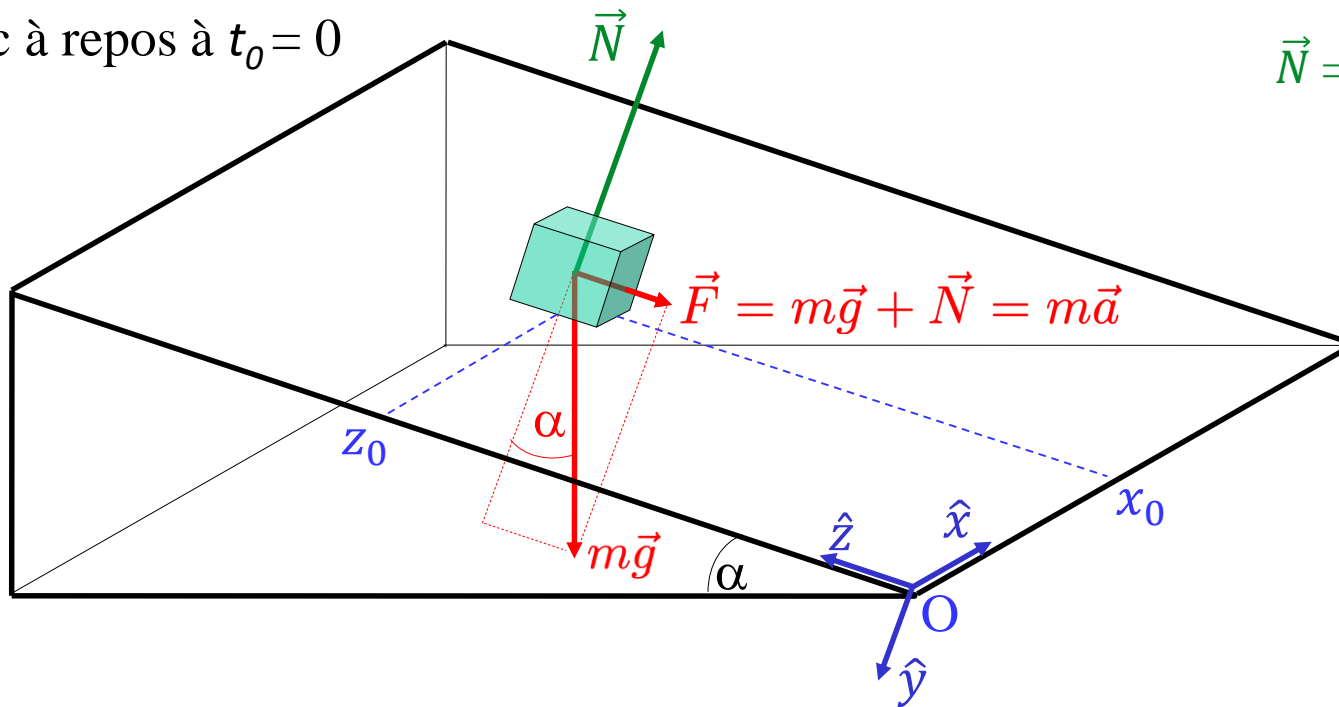
- **toujours perpendiculaire au support**

- **la force de liaison devient nulle \Leftrightarrow la contrainte disparaît**

- Souvent on ne spécifie pas le mécanisme qui exerce la contrainte (tout ce passe comme si la surface ou la courbe exerçait la force de liaison)
- Le force de liaison est a priori inconnue; elle fait partie du problème à résoudre

2.6 Ex.: Plan incliné sans frottement

Bloc à repos à $t_0 = 0$



\vec{N} = force de « liaison » qui contraint le point matériel à rester sur le plan incliné (perpendiculaire au plan)

Répère $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

Projection sur axe x: $m\ddot{x} = F_x = 0$
 Projection sur axe y: $m\ddot{y} = F_y = mg \cos \alpha - N = 0$
 Projection sur axe z: $m\ddot{z} = F_z = -mg \sin \alpha$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \sin \alpha \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \\ y(t) &= 0; \quad N(t) = mg \cos \alpha \\ z(t) &= z_0 - \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 \end{aligned}$$

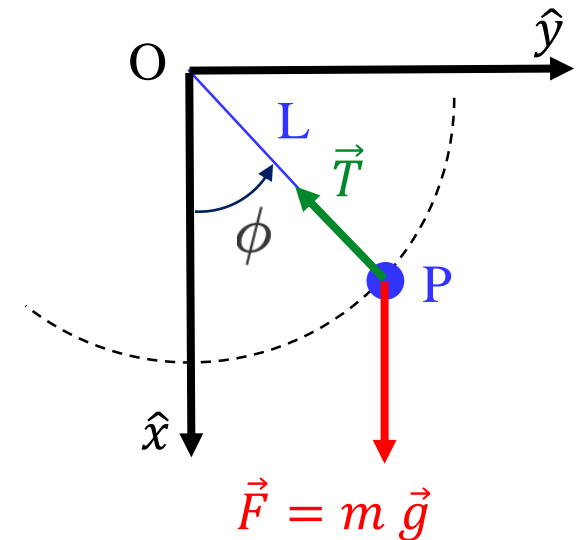
2.6 Ex.: le pendule mathématique

Une masse P, que on considère punctiforme, est attachée avec une ficelle de masse négligeable au point O.

On bouge la masse P tel que la ficelle forme un angle ϕ_0 avec la vertical à $t_0 = 0$.

A l'instant $t_0 = 0$ on laisse la masse P libre de osciller

La **contrainte ou force de liaison** est représentée par la ficelle. Si on part avec la ficelle tendue, la ficelle oblige la masse P à suivre un arc de circonférence (\vec{T} = tension de la ficelle)



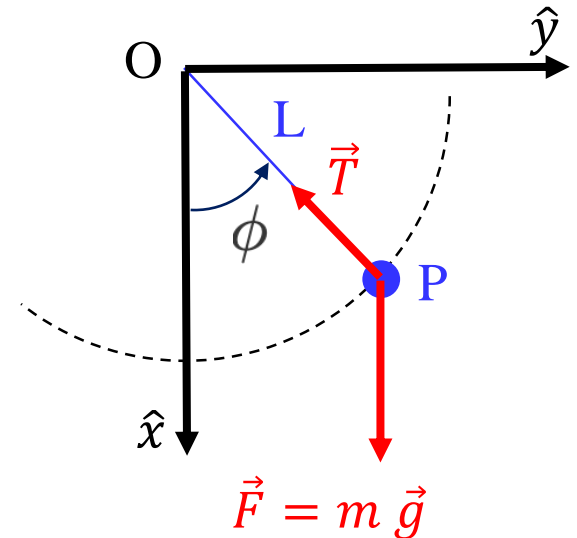
Quiz

- 1) Est ce que la période d'oscillation d'un pendule dépend de la masse?
- 2) Est-ce que la période d'oscillation dépende de l'angle initiale ?

2.6 Ex.: le pendule mathématique

On essaye de trouver la solution en utilisant le repère fixe

Repère cartésien fixe: $O\hat{x}\hat{y}$



$$\begin{cases} \vec{T} \cdot \hat{x} + m\vec{g} \cdot \hat{x} = m\ddot{x} \\ \vec{T} \cdot \hat{y} = m\ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T(t)\cos\phi + mg = m\ddot{x} \\ -T(t)\sin\phi = m\ddot{y} \end{cases}$$

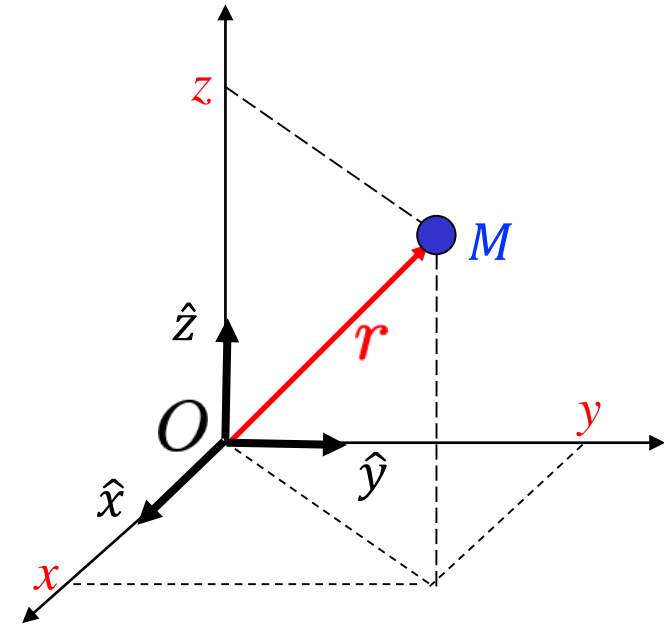
Solution compliquée parce que la tension $T(t)$ et l'angle $\phi(t)$ sont des fonctions du temps

2.3 Mouvement d'un point matériel M

On décrit le mouvement du point M par rapport au repère $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ en utilisant des coordonnées cartésiennes

Position:

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$



Pour un référentiel donné il existe une infinité de systèmes de coordonnées (ou bases)

Exemples:

Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

Coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

Le choix meilleur dépend du problème à traiter

2.3 Base en rotation

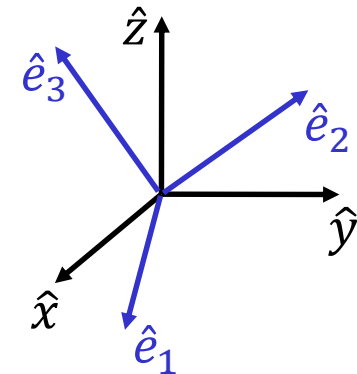
- La description d'un système peut être faite selon deux points de vue:
 - **Système physique en rotation** dans un repère fixe
 - Mouvement circulaire d'un point matériel (satellite par rapport au Pole Nord)
 - Mouvement de rotation d'un solide sur lui-même (toupie, Terre, ...)
 - **Système physique fixe** dans un système de coordonnées (Base) en rotation
 - Base $\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ solidaire avec un satellite

Théorème d'Euler:

Soit deux bases orthonormées droites de même origine :
il existe toujours une rotation qui amène la première sur
la deuxième

Choix de la base en rotation:

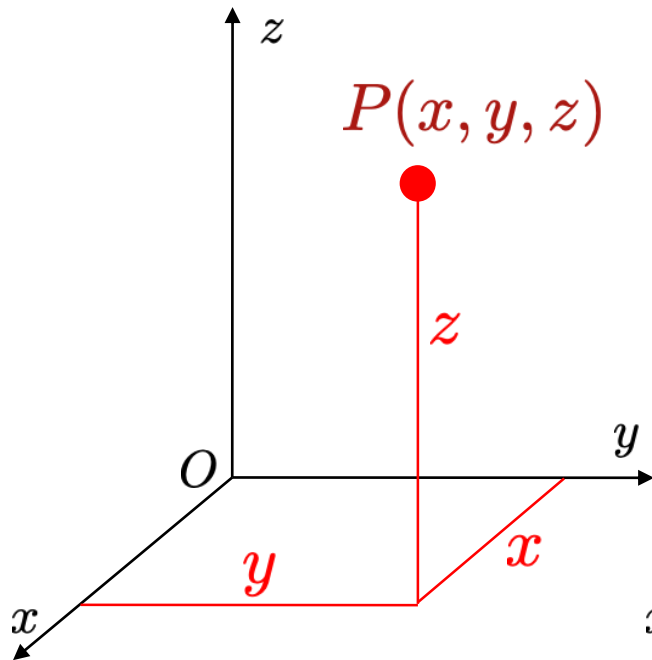
- $\hat{e}_1 = \hat{t}$ tangent à la trajectoire
- \hat{e}_2 perpendiculaire à la trajectoire
- $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$ selon la règle de la main droite



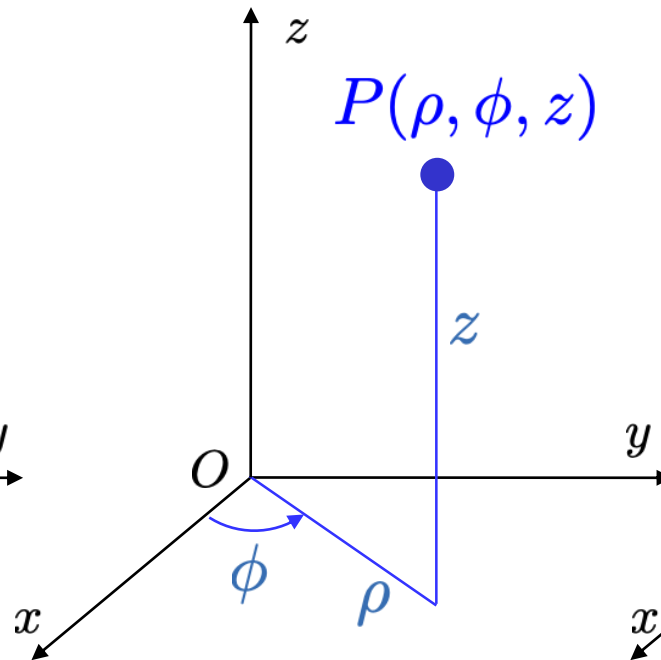
Une rotation spatiale est caractérisée par un **axe de rotation** (dans l'espace),
un **sens de rotation** et un **angle de rotation**

2.3 Différents systèmes de coordonnées

cartésiennes

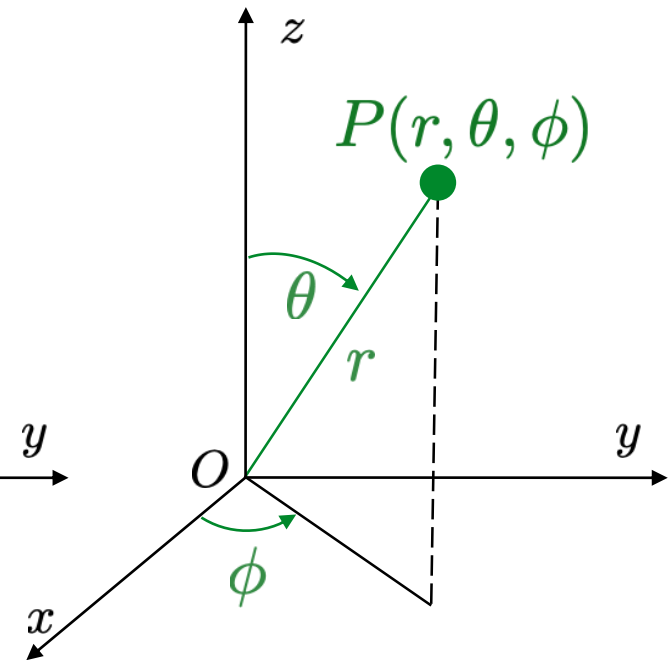


cylindriques



$$\begin{aligned}\rho &\geq 0 \\ \phi &\in [0, 2\pi[\\ z &\end{aligned}$$

sphériques

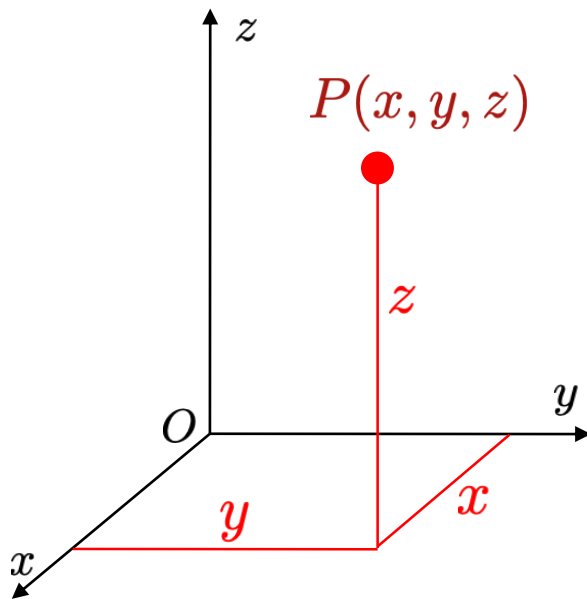


$$\begin{aligned}r &\geq 0 \\ \theta &\in [0, \pi] \\ \phi &\in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

- Autre ex.:
- Coordonnées polaires (ρ, ϕ) quand z est constante
 - coordonnées géographiques sur le globe terrestre (latitude, longitude, altitude)

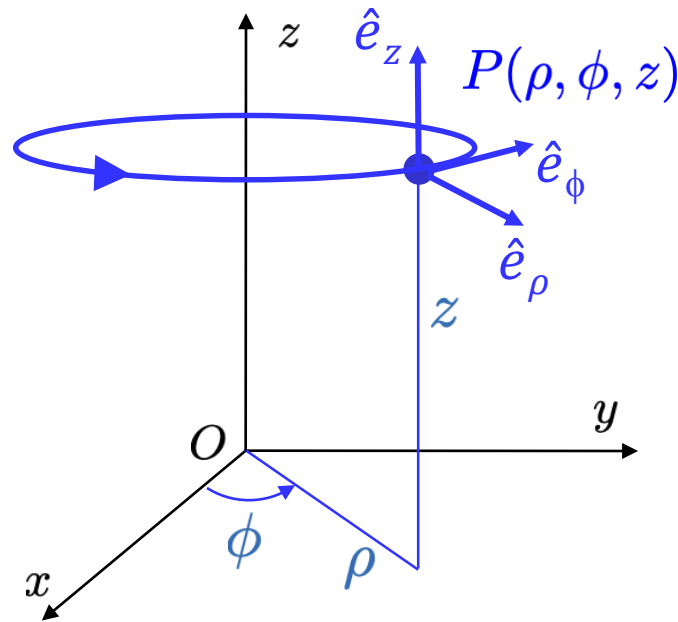
2.3 Bases (Repères) associés aux systèmes de coordonnées

cartésiennes



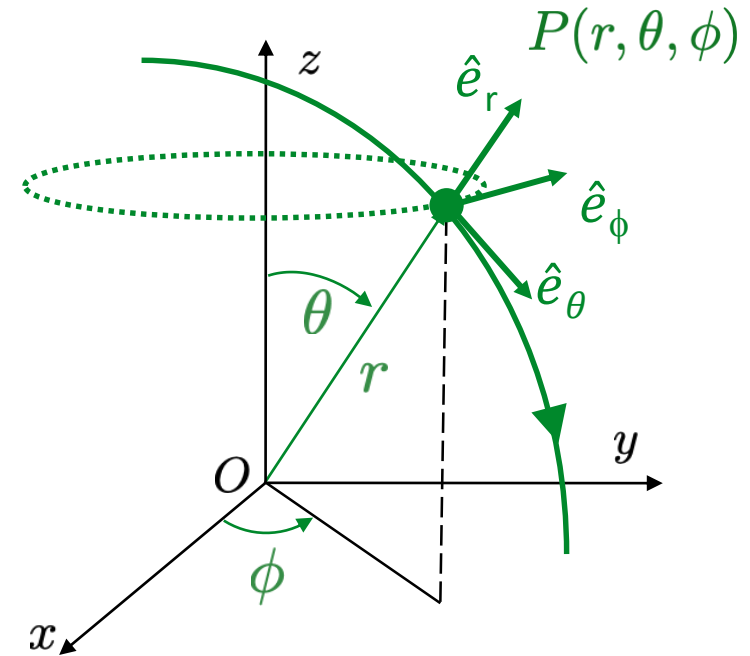
$O \hat{x} \hat{y} \hat{z}$

cylindriques



$O \hat{e}_\rho \hat{e}_\phi \hat{e}_z$

sphériques



$O \hat{e}_r \hat{e}_\theta \hat{e}_\phi$

2.4 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

- Point matériel P en mouvement
- Coordonnées cylindriques :

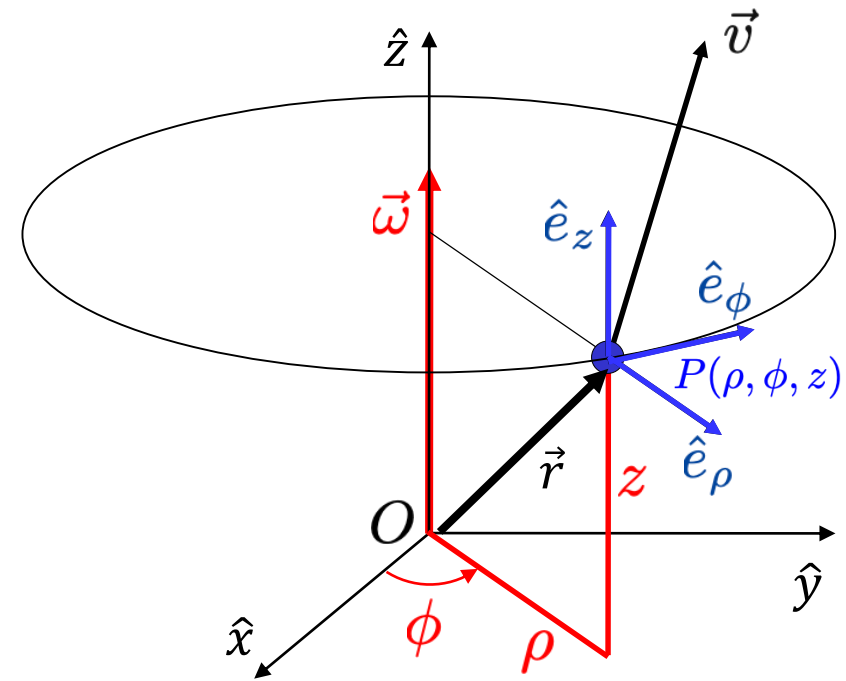
$$\begin{cases} \rho = \rho(t) & \geq 0 \\ \phi = \phi(t) & \in [0, 2\pi[\\ z = z(t) & \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z \end{cases}$$

- Base (repère) en rotation associé aux coordonnées cylindriques du point P : $O \hat{e}_\rho \hat{e}_\phi \hat{e}_z$

- Vitesse angulaire de rotation de la base: $\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{z} = \dot{\phi} \hat{z}$

- Position, vitesse et accélération dans ce repère :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \overrightarrow{OP} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z \\ \vec{a} &= \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$



$$\vec{v} \cdot \hat{e}_\rho = \text{vitesse radiale}$$

$$\vec{v} \cdot \hat{e}_\phi = \text{vitesse transverse}$$

$$\vec{a} \cdot \hat{e}_\rho = \text{accélération radiale}$$

$$\vec{a} \cdot \hat{e}_\phi = \text{accélération transverse}$$

2.4 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

Calculé avec formule de Poisson:

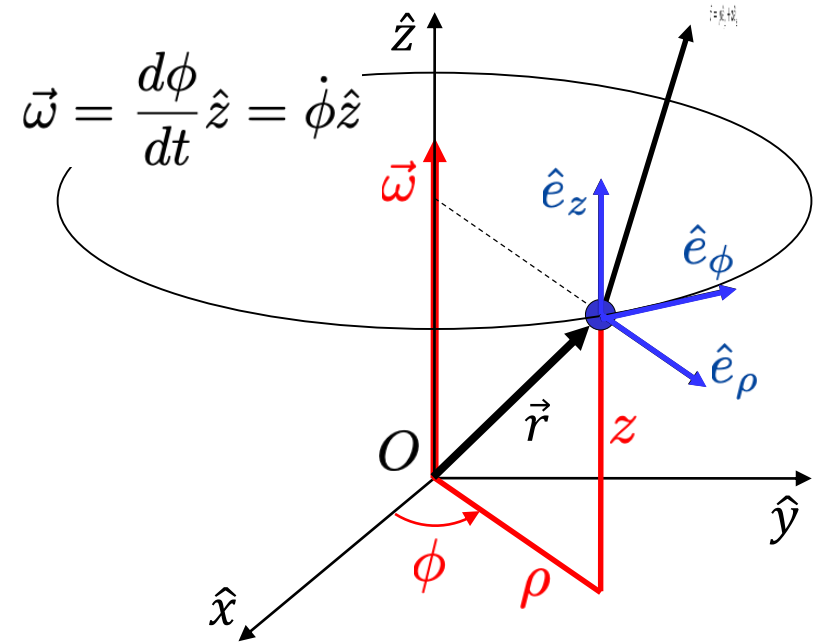
$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i$$

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z} \hat{e}_z + z \dot{\hat{e}}_z$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \dot{\phi} \dot{\hat{e}}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z + \dot{z} \dot{\hat{e}}_z = \\ &= \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_\phi - \rho \dot{\phi}^2 \hat{e}_\rho + \ddot{z} \hat{e}_z = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$



Application de la formule de Poisson
aux vecteurs de base

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i$$

$$\dot{\hat{e}}_\rho = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi} \hat{z} \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = \dot{\phi} \hat{z} \wedge \hat{e}_\phi = -\dot{\phi} \hat{e}_\rho$$

$$\dot{\hat{e}}_z = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_z = \dot{\phi} \hat{z} \wedge \hat{e}_z = 0$$

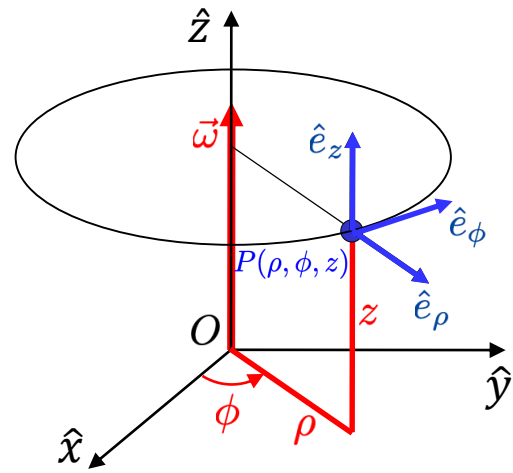
2.4 Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et cylindriques

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

repère fixe $\Rightarrow \dot{\hat{x}} = \dot{\hat{y}} = \dot{\hat{z}} = 0$
 $\ddot{\hat{x}} = \ddot{\hat{y}} = \ddot{\hat{z}} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) = \frac{d}{dt}(x \hat{x}) + \frac{d}{dt}(y \hat{y}) + \frac{d}{dt}(z \hat{z}) \\ &= \dot{x} \hat{x} + \underbrace{x \dot{\hat{x}}}_{=0} + \dot{y} \hat{y} + \underbrace{y \dot{\hat{y}}}_{=0} + \dot{z} \hat{z} + \underbrace{z \dot{\hat{z}}}_{=0} \\ &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} + \ddot{z} \hat{z} \end{aligned}$$



| | | |
|----------------------|--|---|
| $x = \rho \cos \phi$ | $\dot{x} = \dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi$ | $\ddot{x} = \ddot{\rho} \cos \phi - 2\dot{\rho}\dot{\phi} \sin \phi - \rho\ddot{\phi} \sin \phi - \rho\dot{\phi}^2 \cos \phi$ |
| $y = \rho \sin \phi$ | $\dot{y} = \dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi$ | $\ddot{y} = \ddot{\rho} \sin \phi + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \cos \phi + \rho\ddot{\phi} \cos \phi - \rho\dot{\phi}^2 \sin \phi$ |
| $z = z$ | $\dot{z} = \dot{z}$ | $\ddot{z} = \ddot{z}$ |

**Vecteurs du repère
en coordonnées cylindriques:**

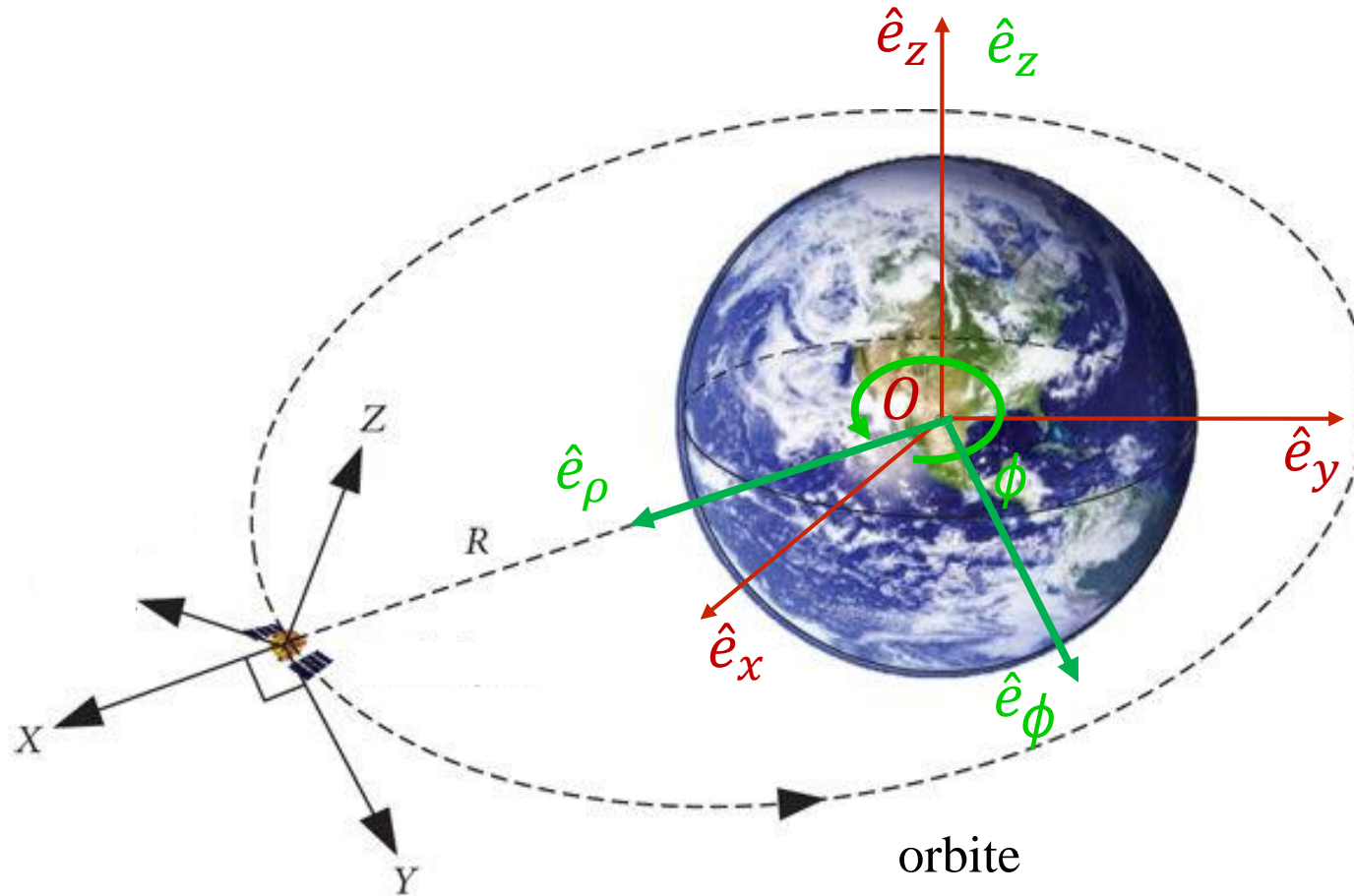
$$\begin{aligned} \hat{x} &= \cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi \\ \hat{y} &= \sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi \\ \hat{z} &= \hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ &= \rho \cos \phi [\cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi] + \rho \sin \phi [\sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi] + z \hat{e}_z \\ &= \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \\ \Rightarrow \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \\ &= (\dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi) [\cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi] + (\dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi) [\sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi] + \dot{z} \hat{e}_z \\ &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} + \ddot{z} \hat{z} = (\ddot{\rho} \cos \phi - 2\dot{\rho}\dot{\phi} \sin \phi - \rho\ddot{\phi} \sin \phi - \rho\dot{\phi}^2 \cos \phi) [\cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi] \\ &\quad + (\ddot{\rho} \sin \phi + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \cos \phi + \rho\ddot{\phi} \cos \phi - \rho\dot{\phi}^2 \sin \phi) [\sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi] + \ddot{z} \hat{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$

→ voir document “Cinématique et systèmes de coordonnées” sur Moodle

2.4 Ex.: coordonnées cylindriques

mouvement d'un satellite autour de la Terre



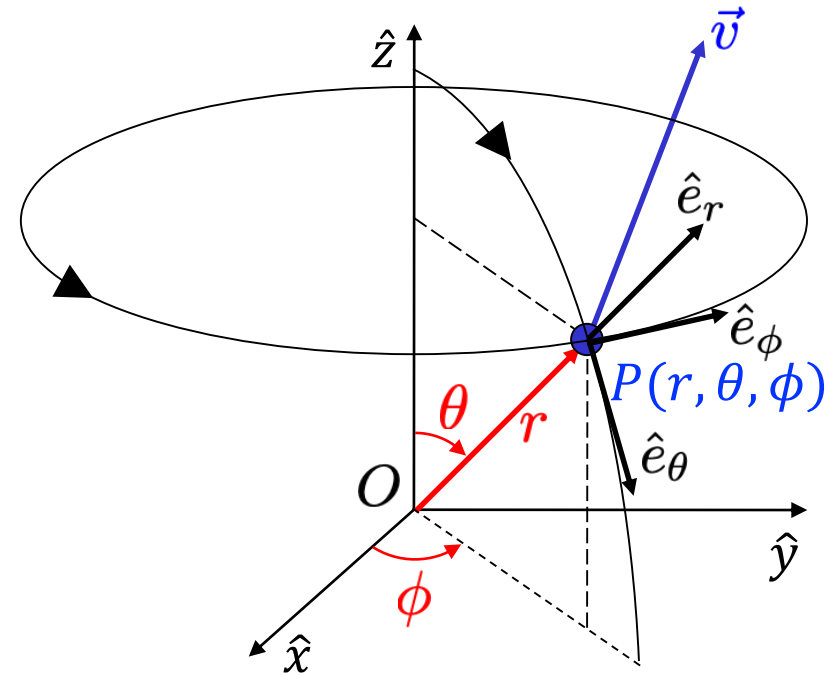
2.5 Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

- Point matériel P en mouvement
- Coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} r = r(t) & \geq 0 \\ \theta = \theta(t) & \in [0, \pi] \\ \phi = \phi(t) & \in [0, 2\pi[\end{cases} \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

- Base (repère) en rotation associé aux coordonnées sphériques du point P:

$$O \hat{e}_\rho \hat{e}_\phi \hat{e}_z$$



- Une rotation infinitésimale du vecteur \vec{r} est composée de

- une rotation infinitésimale d'angle $d\phi$ autour de l'axe \hat{z} : $d\vec{r}_\phi = d\phi r \sin \theta \hat{e}_\phi = \dot{\phi} dt \hat{z} \wedge \vec{r}$
- une rotation infinitésimale d'angle $d\theta$ autour de \hat{e}_ϕ : $d\vec{r}_\theta = d\theta r \hat{e}_\theta = \dot{\theta} dt \hat{e}_\phi \wedge \vec{r}$

⇒ rotation infinitésimale totale :

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\theta + d\vec{r}_\phi = \dot{\theta} dt \hat{e}_\phi \wedge \vec{r} + \dot{\phi} dt \hat{z} \wedge \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \dot{\theta} \hat{e}_\phi \wedge \vec{r} + \dot{\phi} \hat{z} \wedge \vec{r} = (\dot{\theta} \hat{e}_\phi + \dot{\phi} \hat{z}) \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

- Vitesse angulaire de rotation du repère:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_\phi + \dot{\phi} \hat{z}$$

2.5 Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

- Vitesse angulaire de rotation du repère :

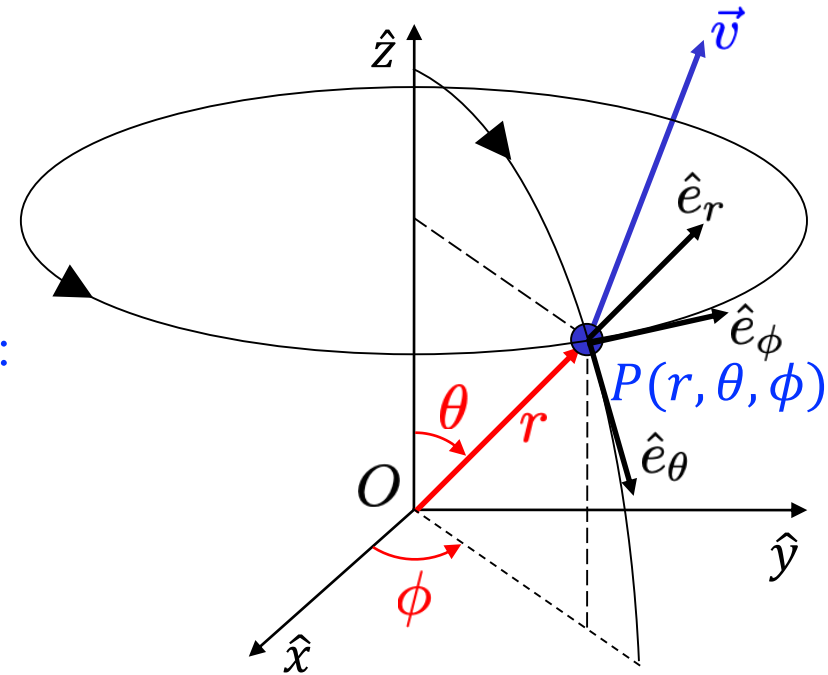
$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_\phi + \dot{\phi} \hat{z}$$

- Formule de Poisson appliquée aux vecteurs de base :

$$\dot{\hat{e}}_r = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\theta$$



- Position, vitesse et accélération dans ce repère :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r \hat{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \hat{e}_r$$

$$+ \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \hat{e}_\theta$$

$$+ \left(r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \right) \hat{e}_\phi$$

accélération radiale

accélération méridienne

accélération transverse

2.6 Contraintes et forces de liaison

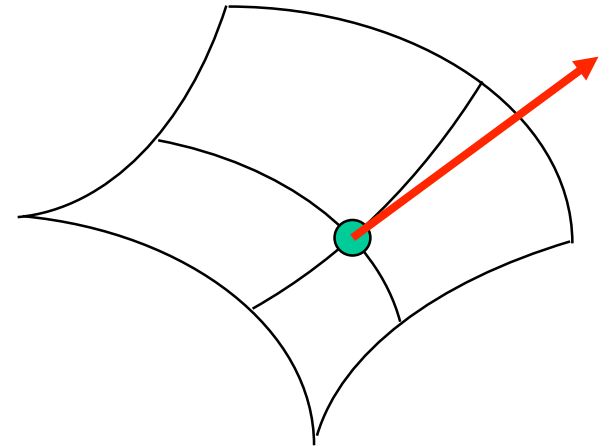
La **dynamique** est une discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en **mouvement sous l'influence des actions mécaniques (ou forces)** qui leur sont appliquées

Déjà rencontrée: force de pesanteur et frottement avec l'air

- Point matériel restreint à se déplacer sur un support, par exemple une courbe ou une surface lisse (fixe ou en mouvement)

- Exemples:

- Pendule mathématique, contraint à rester à une distance constante d'un point fixe (i.e. sur une surface sphérique centrée sur ce point)
- Wagonnet d'un « grand huit », qui ne doit pas dérailler
- Goutte d'eau coulant sur le pare-brise d'une voiture
- Bille dans un anneau en rotation



- **Force de liaison = force exercée sur le point matériel pour qu'il obéisse à une contrainte géométrique**

- **toujours perpendiculaire au support**

- **la force de liaison devient nulle \Leftrightarrow la contrainte disparaît**

- Souvent on ne spécifie pas le mécanisme qui exerce la contrainte (tout ce passe comme si la surface ou la courbe exerçait la force de liaison)
- Le force de liaison est a priori inconnue; elle fait partie du problème à résoudre

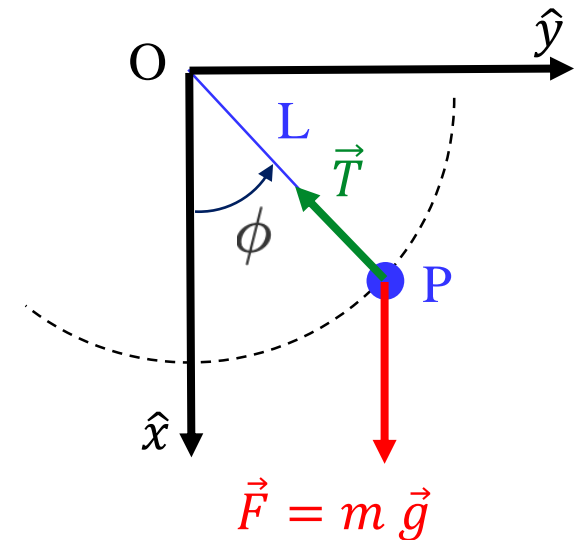
2.6 Ex.: le pendule mathématique

Une masse P, que on considère punctiforme, est attachée avec une ficelle de masse négligeable au point O.

On bouge la masse P tel que la ficelle forme un angle ϕ_0 avec la vertical à $t_0 = 0$.

A l'instant $t_0 = 0$ on laisse la masse P libre de osciller

La **contrainte ou force de liaison** est représentée par la ficelle. Si on part avec la ficelle tendue, la ficelle oblige la masse P à suivre un arc de circonférence (\vec{T} = tension de la ficelle)



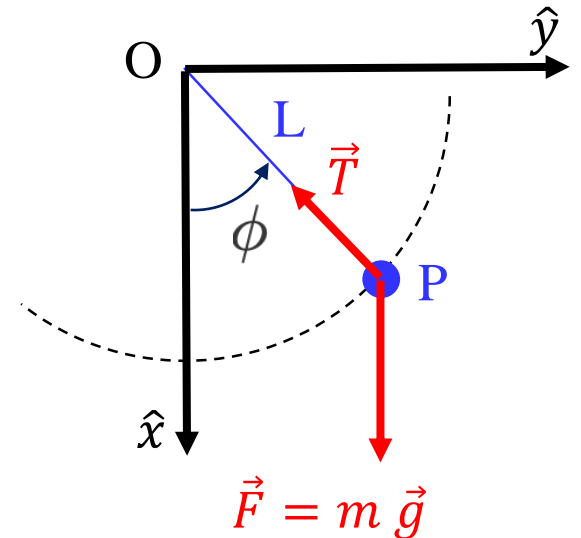
Quiz

- 1) Est ce que la période d'oscillation d'un pendule dépend de la masse?
- 2) Est-ce que la période d'oscillation dépende de l'angle initiale ?

2.6 Ex.: le pendule mathématique

On essaye de trouver la solution en utilisant le repère fixe

Repère cartésien fixe: $O\hat{x}\hat{y}$



$$\begin{cases} \vec{T} \cdot \hat{x} + m\vec{g} \cdot \hat{x} = m\ddot{x} \\ \vec{T} \cdot \hat{y} = m\ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T(t)\cos\phi + mg = m\ddot{x} \\ -T(t)\sin\phi = m\ddot{y} \end{cases}$$

Solution compliquée parce que la tension $T(t)$ et l'angle $\phi(t)$ sont des fonctions du temps

2.6 Ex.: le pendule mathématique

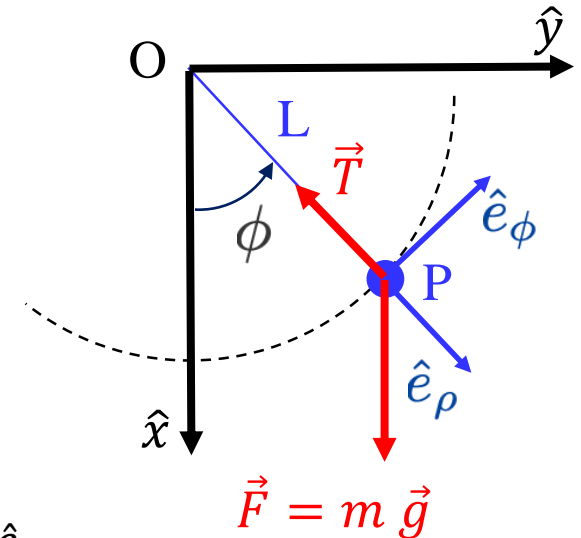
Galilée observe par premier que la période d'oscillation d'un pendule ne dépend pas de m

Repère cartésien fixe: $O\hat{x}\hat{y}$

Repère en rotation: $O\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi$

2^{ème} loi de Newton $\sum \vec{F} = m \vec{a}$

En coordonnées cylindriques $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$



$$\begin{cases} \vec{T} \cdot \hat{e}_\rho + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho \\ m \vec{g} \cdot \hat{e}_\phi = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T + m g \cos \phi = mL\dot{\phi}^2 \\ -m g \sin \phi = mL\ddot{\phi} \end{cases}$$

Le mouvement du pendule ne dépend pas de la masse $\Rightarrow -g \sin \phi = L\ddot{\phi}$

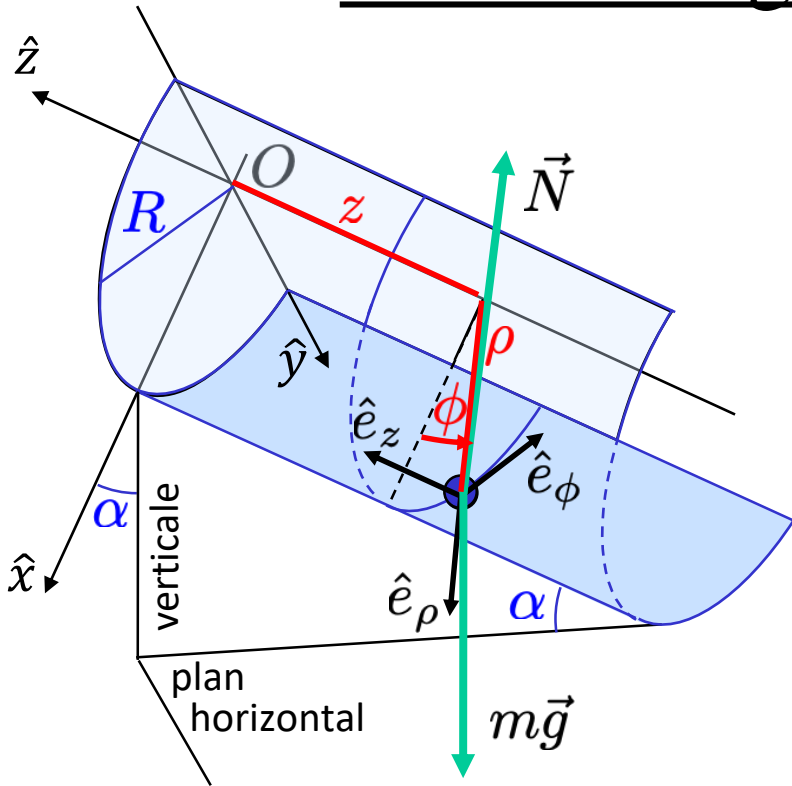
Pour des petites oscillations $\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \phi \sim \phi \Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\phi = -\omega_0\phi$

Equation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = 2\pi\nu_0$

$\phi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

$\omega_0 = \frac{g}{L}$

2.6 Ex.: Luge sur une piste cylindrique



Repère cartésien fixe: $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

Repère en rotation: $O\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$

Contrainte: la luge reste sur la piste $\rho = R \dot{\rho} = 0 \ddot{\rho} = 0$

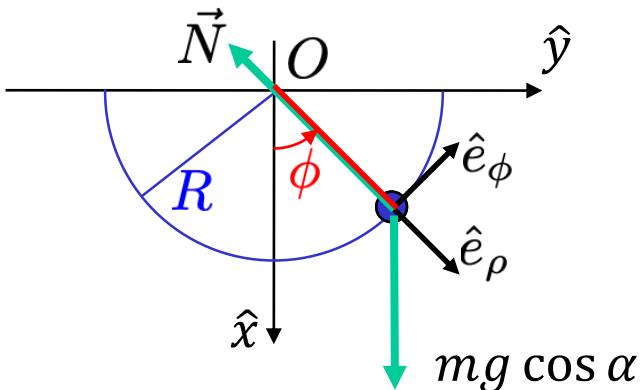
Pas de support en direction \hat{e}_ϕ ($\vec{N} \cdot \hat{e}_\phi = 0$) et \hat{e}_z ($\vec{N} \cdot \hat{e}_z = 0$)

En coordonnées cylindriques

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$$

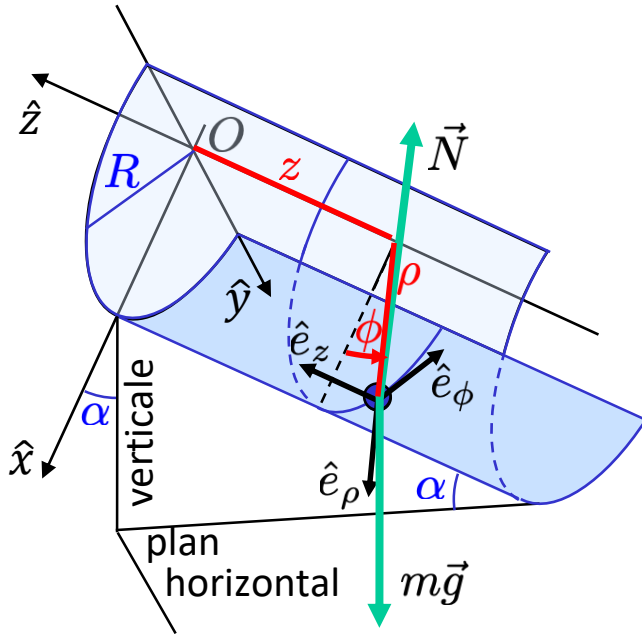
$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \vec{N} \cdot \hat{e}_\rho + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho \\ m \vec{g} \cdot \hat{e}_\phi = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi \\ m \vec{g} \cdot \hat{e}_z = m \ddot{z}\hat{e}_z \end{cases}$$

Projection sur plan $\perp \hat{z}$



$$\begin{cases} -N + m g \cos \alpha \cos \phi = -mR\dot{\phi}^2 \\ -m g \cos \alpha \sin \phi = mR\ddot{\phi} \\ -m g \sin \alpha = m \ddot{z} \end{cases}$$

2.6 Ex.: Luge sur une piste cylindrique



$$\begin{cases} -N + m g \cos \alpha \cos \phi = -mR\dot{\phi}^2 & \text{eq. (1)} \\ -m g \cos \alpha \sin \phi = mR\ddot{\phi} & \text{eq. (2)} \\ -m g \sin \alpha = m \ddot{z} & \text{eq. (3)} \end{cases}$$

eq. (3) \Rightarrow Mouvement uniformément accéléré

$$z(t) = -\frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

eq. (2) \Rightarrow Mouvement du pendule (petites oscil.)

$$\phi(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

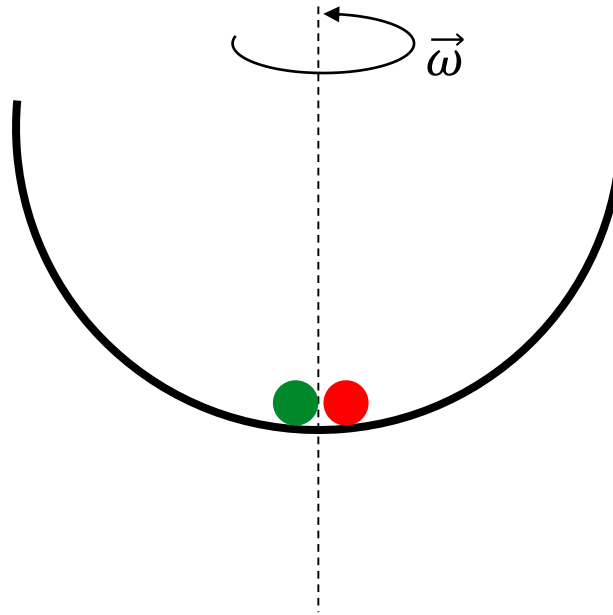
$$\ddot{\phi} = -\phi \frac{g}{R} \cos \alpha$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{R}}$$

eq. (1) \Rightarrow Réaction de la paroi de la piste en fonction du temps:

$$N(t) = m g \cos \alpha \cos \phi + mR\dot{\phi}^2$$

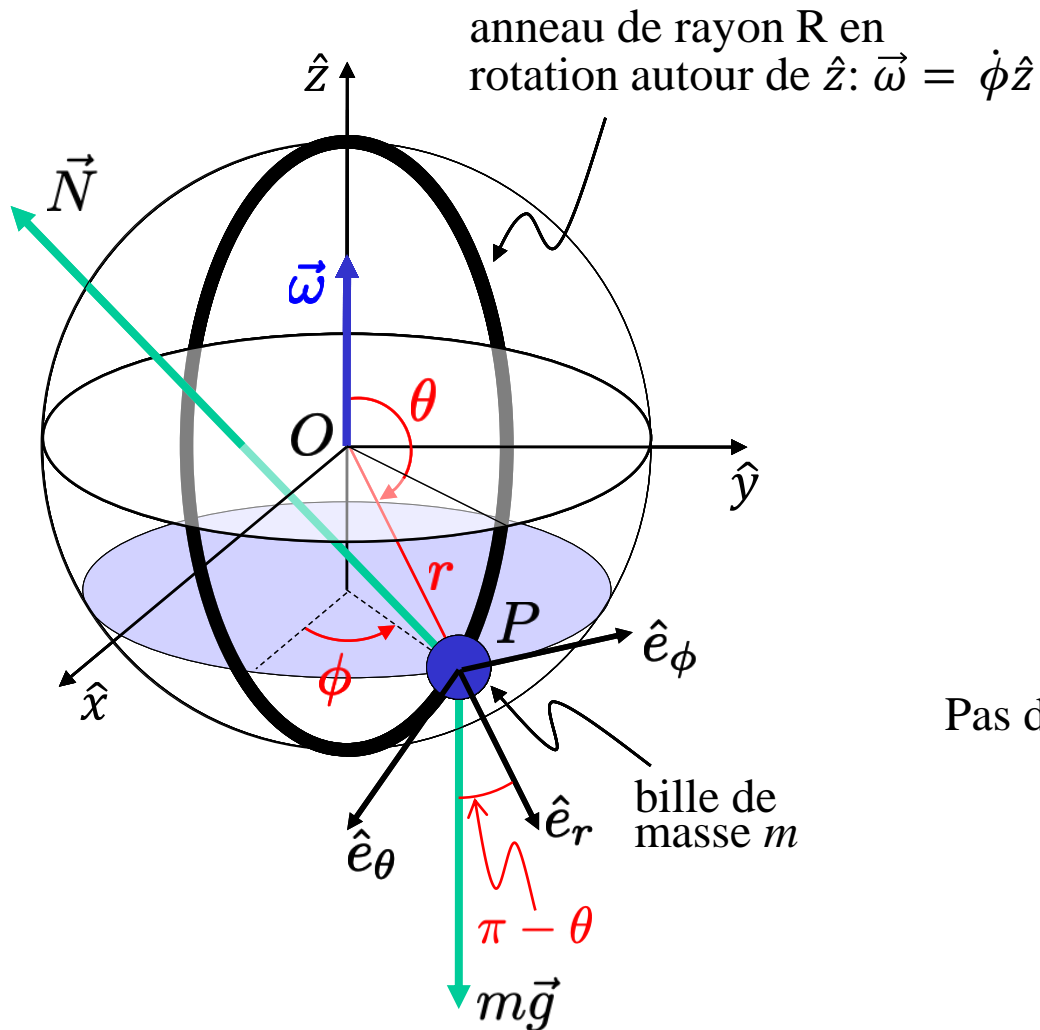
2.6 Ex.: Bille en équilibre dans un tube circulaire en rotation



Deux balles de masse différente dans une glissière tournante: la quelle monte plus haut?

- 1) La plus légère
- 2) La plus lourde
- 3) identique

2.6 Ex.: Bille en équilibre dans un tube circulaire en rotation



Contrainte: la bille reste sur l'anneau

$$\begin{cases} r = R, & \dot{r} = 0, & \ddot{r} = 0 \\ & \dot{\phi} = \omega, & \ddot{\phi} = 0 \end{cases}$$

Pas de force de liaison en direction \hat{e}_θ , tangent au support:

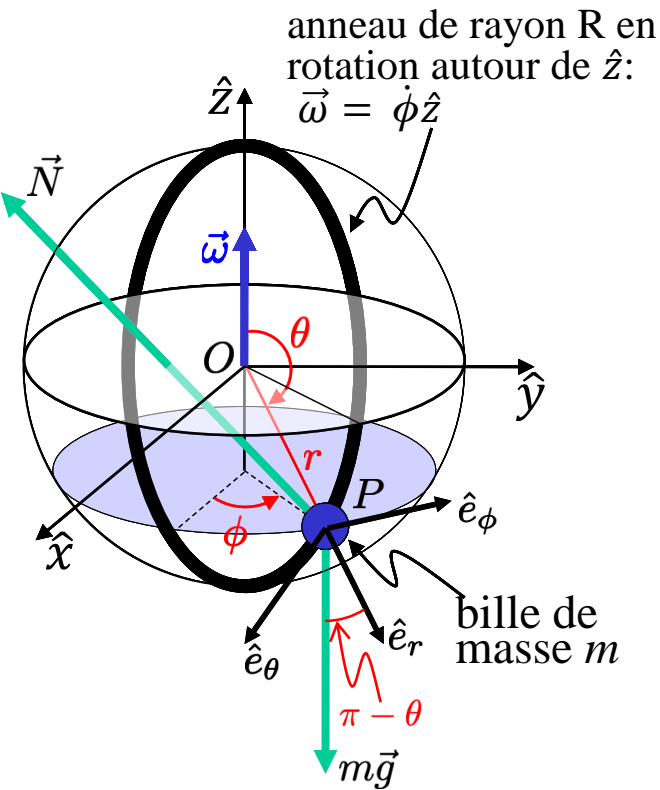
$$\vec{N} \cdot \hat{e}_\theta = 0$$

bille en équilibre: $\dot{\theta} = 0; \ddot{\theta} = 0$

Forces s'exerçant sur la bille:

- Poids de la bille: $m\vec{g} = mg \cos(\pi - \theta) \hat{e}_r + mg \sin(\pi - \theta) \hat{e}_\theta$
- Force de liaison: $\vec{N} = Nr\hat{e}_r + N_\phi\hat{e}_\phi$

2.6 Ex.: Bille en équilibre dans un tube circulaire en rotation



Coordonnées
sphériques

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

⇓

$$\begin{cases} \vec{N} \cdot \hat{e}_r + m \vec{g} \cdot \hat{e}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r \\ \vec{N} \cdot \hat{e}_\theta + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta \\ \vec{N} \cdot \hat{e}_\phi + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\phi = m(r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi \end{cases}$$

bille en équilibre: $\dot{\theta} = 0$; $\ddot{\theta} = 0$

Contraintes: $\dot{r} = 0$; $\ddot{r} = 0$; $\dot{\phi} = \omega$;
 $\ddot{\phi} = 0$; $\vec{N} \cdot \hat{e}_\theta = 0$

$$\begin{cases} N_r - mg \cos \theta = -mr\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ mg \sin \theta = -mr\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ N_\phi = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Solutions possibles:

1) $\sin \theta = 0$ ($\Rightarrow \theta = 0$ ou π), $N_r = mg$
 bille sur l'axe vertical

2) $\cos \theta = -\frac{g}{r\omega^2}$ ou $\cos(\pi - \theta) = \frac{g}{r\omega^2} \leq 1$
 $\Rightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$; $\Rightarrow \omega \rightarrow \infty \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$